Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

UNIVERSITÄTSKOLLEG

UNIVERSITÄTSKOLLEG: #STUDIUM+

Tutorium Makroökonomik I:

3. Differentialrechnung

Dr. Kristin Paetz
Tobias Fischer

KOSTENLOSE ZUSATZANGEBOTE UND LEHRMATERIALIEN FÜR ALLE STUDIERENDEN

Das Universitätskolleg wird aus Mitteln des BMBF unter dem Förderkennzeichen 01PL17033 gefördert.
Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Herausgebern und Autorinnen und Autoren.

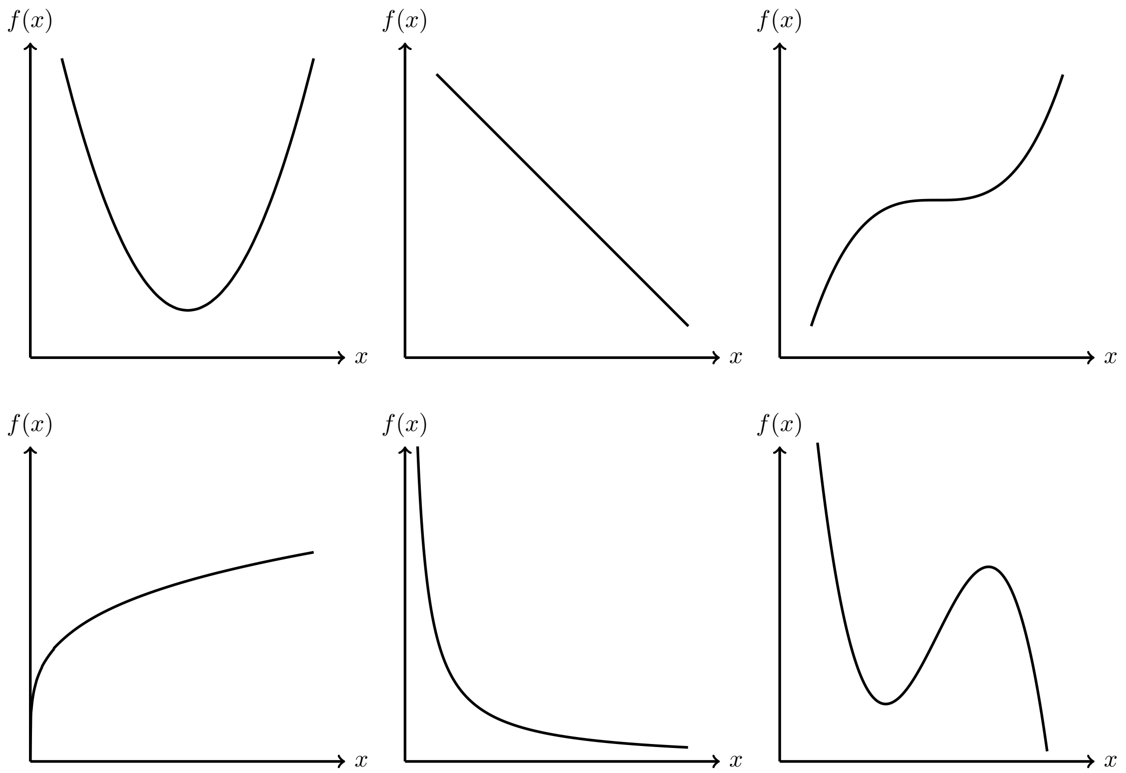
GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Tutorium Makroökonomik I: 3. Differentialrechnung

Ziel: (partielle) Ableitungen graphisch und analytisch bestimmen sowie interpretieren
Mathematische Grundlagen: Kapitel 6, 11, 12 im Buch[1]

Aufgabe 1 (vgl. Kapitel 6.4, 6.7) - Ableitung: graphisch und Interpretation

1. Skizzieren Sie die erste Ableitung



2. $C(Y_V)$ sei eine Konsumfunktion, die vom verfügbaren Einkommen Y_V abhängt. Wie ist ... zu interpretieren?

   (a) $C(500) = 400$
   (b) $C'(500) = 0,7$
   (c) $C'(800) = 0,5$
   (d) $C'(Y_V) = \frac{dC}{dY_V} > 0$
   (e) $C''(Y_V) = \frac{d^2C}{dY_V^2} < 0$
   (f) Skizzieren Sie die Funktion

Aufgabe 2 (vgl. Kapitel 6.7) - Ableitung von Funktionen einer Variablen

Bestimmen Sie die erste Ableitung

[1] Sydsæter, Hammond und Strøm, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Pearson, 2015
Weitere Aufgaben finden Sie hier sowie im Übungsbuch der Makroökonomie: Forster, Klüh und Sauer, Makroökonomie - Das Übungsbuch, Pearson, 2014

1. $y(x) = x^3 - 5x^2 + 4$
2. $C(Y_V) = 0,3 + 0,5Y_V$
3. $C(Y_V) = c_0 + c_1 Y_V$
4. $C(Y) = c_0 - c_1 t_0 + c_1(1 - t_1)Y$
5. $Y(Z) = Z$
6. $I(i) = 2$

Aufgabe 3 (vgl. Kapitel 11.2, 11.6, 11.7) - Partielle Ableitung von Funktionen mehrerer Variablen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial z}$

1. $y = 2 + 0,2x^3 - 0,4z^5$
2. $y = a + (1 - c)x - bz$
3. $y = c_0 x^2 + c_1 z + 5$
4. $y = \frac{x-z}{5000}$

Aufgabe 4 (vgl. Kapitel 12.9) - Totales Differential

1. Bilden Sie das totale Differential zu folgender Funktion: $y = a + (1 - c)x - bz$ für konstante a, b, c
2. Gegeben ist das Gütermarktgleichgewicht: $Y = \frac{1}{1-c_1}(c_0 + I + G - c_1 T)$ c_1 sei konstant, mit $0 < c_1 < 1$
   (a) Bilden Sie das totale Differential
   (b) Wie wirken sich die folgenden Änderungen auf den gleichgewichtigen Output aus (positiv oder negativ? Multiplikator?)
      i. Staatsausgaben G steigen
      ii. autonomer Konsum c_0 steigt
      iii. Steuern T steigen
      iv. Steuern und Staatsausgaben steigen um den selben Wert: $dG = dT$

Aufgabe 5 (vgl. Kapitel 6, 11, 12) - Gleichungssysteme

Betrachten Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} Y &= Z \\ Z &= C + I + G \\ C &= c_0 + c_1(Y_V) \\ I &= b_0 - b_2 i \\ Y_V &= Y - T \end{aligned}$$

mit $0 < c_1 < 1$, $0 < b_2 < 1$, $c_0, b_0 > 0$

1. Bestimmen Sie $\frac{\partial Y}{\partial T}$, $\frac{\partial Y}{\partial G}$, $\frac{\partial Y}{\partial i}$ und erörtern Sie ihre Vorzeichen
2. Geben Sie mithilfe der Verhaltensgleichungen jeweils die Wirkungskette zu den in 1 mit partiellen Ableitungen untersuchten Änderungen an
3. Bestimmen Sie $\frac{\partial i}{\partial c_0}$, $\frac{\partial i}{\partial G}$, $\frac{\partial i}{\partial Y}$ und erörtern Sie ihre Vorzeichen
4. Zeichnen Sie die IS-Kurve, wobei Sie den Zinssatz i auf der Ordinate und Produktionsmenge Y auf der Abszisse abtragen
5. Verschiebt sich die Kurve oder wandern wir entlang der Kurve, wenn ... steigt?
   (a) c_0 (b) T (c) G (d) Y (e) i

Zusatzaufgaben

1. Ableitung von Funktionen einer Variablen

   (a) Bestimmen Sie die erste Ableitung

      i. $f(x) = \frac{x-5}{10}$
      ii. $f(x) = x^4 - x^{-4}$
      iii. $f(x) = \frac{1}{x}$
      iv. $S(Y) = -c_0 + (1 - c_1)Y$ mit $0 < c_1 < 1$

   (b) Es bezeichne K(x) die Kosten in Euro für den Bau eines Hauses mit einer Grundstücksgröße von x Quadratmetern. Wie ist $K'(100) = 50$ zu interpretieren?

   (c) K(x) seien die Kosten für die Herstellung von x Einheiten eines Produkts pro Monat. Wie ist $K'(500) = 20$ zu interpretieren? Nehmen Sie an, der zu erzielende Preis betrage 30 und der gegenwärtige Output pro Monat sei 500. Lohnt es sich, die Produktion zu erweitern?

   (d) Die Gesamtersparnis einen Landes in Euro sei eine Funktion $S(Y)$ des BIP Y. Wie können Sie ... interpretieren? Skizzieren Sie die Funktion.

      i. $S'(Y) = 0,1 + 0,004Y^2$
      ii. $S'(1000) = 40,1$
      iii. $S'(10000) = 4000,1$

2. Partielle Ableitung von Funktionen mehrerer Variablen

   (a) Bestimmen Sie $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial y}{\partial z}$ für die folgende Funktion: $y = x^{0,4}z^{0,6}$

   (b) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung für die folgende Güternachfrage: $Z = (c_0 + I + G - c_1T) + c_1Y$.

   (c) Es sei $Y = F(K, L)$ die Anzahl der produzierten Einheiten, wenn K Einheiten Kapital und L Einheiten Arbeit als Input in einem Produktionsprozess verwendet werden. Welches ist die ökonomische Interpretation von $\frac{\partial Y}{\partial K} = 5$, wenn K=100 und L=50 ist?

   (d) Betrachten Sie die Produktionsfunktion:

   $$Y = F(K, L) = K^\alpha L^\beta, \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$$

   wobei Y die Anzahl produzierter Einheiten, K das Kapital und L der Arbeitseinsatz ist

      i. Bestimmen und interpretieren Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung
      ii. Bestimmen und interpretieren Sie $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}$ und $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}$

3. Totales Differential

   (a) Bilden Sie das totale Differential zu folgender Funktion: $y = c_0x^2 + c_1z + 5$, für konstante c_0, c_1

   (b) Stellen Sie folgende IS-Gleichung zunächst zum Gütermarktgleichgewicht um, bilden Sie dann das totale Differential: $Y = c_0 + c_1(Y - T) + d_0 - d_1i + G$ für konstante c_0, c_1, d_0, d_1

   (c) Gütermarktgleichgewicht: $Y = \frac{1}{1-c_1}(c_0 + I + G - c_1T)$. Die marginale Konsumneigung c_1 sei 0,5. Wie wirken sich die folgenden Änderungen auf den gleichgewichtigen Output aus?

      i. Steuern T steigen um 100 Euro
      ii. Staatsausgaben G steigen um 100 Euro
      iii. autonomer Konsum c_0 steigt um 200 Euro

iv. Steuern T steigen um 100 Euro und Staatsausgaben G steigen um 100 Euro und autonomer Konsum c_0 steigt um 200 Euro

4. Gleichungssysteme

(a) Gegeben sei die Gleichung $Y = C + I + G$ mit $C = 10 + 0,9Y$ und konstantem I. Bestimmen Sie $\frac{dY}{dG}$

(b)
$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= c_0 + c_1(Y - T) \quad \text{mit } 0 < c_1 < 1, 0 < b_1 < 1, 0 < (c_1 + b_1) < 1, c_0, b_0 > 0 \\ I &= b_0 + b_1 Y \end{aligned}$$

i. Bestimmen Sie $\frac{\partial Y}{\partial c_0}, \frac{\partial Y}{\partial G}, \frac{\partial Y}{\partial T}$ und erörtern Sie ihre Vorzeichen.

ii. Welche der Variablen Y, C, I, G, T sind hier endogen, welche exogen?

(c)
$$\begin{aligned} C &= c_0 + c_1 Y_V \\ T &= t_0 + t_1 Y \quad \text{mit } 0 < c_1 < 1, \quad 0 < t_1 < 1, \quad c_0, t_0 > 0 \\ Y_V &= Y - T \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial C}{\partial Y}$, $\frac{\partial C}{\partial t_0}$ und erörtern Sie ihre Vorzeichen

(d)
$$\begin{aligned} Y &= cY - ai \\ \frac{M}{P} &= d_1 Y - d_2 i \end{aligned} \quad \text{mit } 0 < c < 1, \quad a, d_1, d_2 > 0$$

Lösen Sie die Gleichungen nach Y. Bestimmen Sie $\frac{\partial Y}{\partial M}$ sowie $\frac{\partial Y}{\partial P}$ und erörtern Sie ihre Vorzeichen

Zusatzaufgaben - Lösung

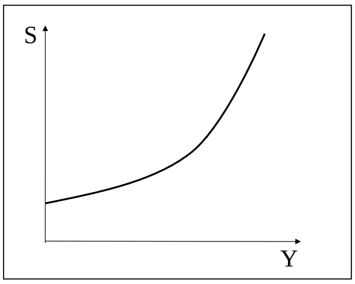
1. Ableitung von Funktionen einer Variablen

   (a) i. $f'(x) = \frac{1}{10}$
   ii. $f'(x) = 4x^3 + 4x^{-5}$
   iii. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
   iv. $S'(Y) = 1 - c_1$

   (b) Eine Erhöhung der Quadratmeter von 100 auf 101 erhöht die Kosten um 50 Euro.

   (c) Eine Erhöhung der produzierten Menge von 500 auf 501 erhöht die Kosten um 20 Euro. Da der zu erzielende Preis höher ist, sollte die Produktion ausgeweitet werden.

   (d) i. Steigt das BIP (Y) um 1 Euro, so steigt die Ersparnis um ungefähr $0,1 + 0,004Y^2$. Die Grenzersparnis ist positiv. Steigt Y, so steigt die Ersparnis (sogar mit zunehmender Rate).
   ii. Eine Erhöhung des BIP von 100 auf 101 erhöht die Ersparnis um ungefähr 40,1 Euro.
   iii. Eine Erhöhung des BIP von 1000 auf 1001 erhöht die Ersparnis um ungefähr 4000,1 Euro.



2. Partielle Ableitung von Funktionen mehrerer Variablen

   (a) $\frac{\partial y}{\partial x} = 0,4x^{-0,6}z^{0,6} \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,6x^{0,4}z^{-0,4}$

   (b) $\frac{\partial Z}{\partial c_0} = 1, \quad \frac{\partial Z}{\partial I} = 1, \quad \frac{\partial Z}{\partial G} = 1, \quad \frac{\partial Z}{\partial T} = -c_1, \quad \frac{\partial Z}{\partial c_1} = -T, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = c_1$

   (c) Eine Erhöhung des Kapitalinputs von 100 auf 101 bei konstantem Arbeitsinput von 50 wird die Produktion um ungefähr 5 Einheiten erhöhen.

   (d) i. $\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} > 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta K^{\alpha}L^{\beta-1} > 0$
   Das Grenzprodukt des Kapitals (der Arbeit) ist positiv. Unter sonst gleichen Bedingungen erhöht eine zusätzliche Einheit an Kapital/ Arbeit den Output.
   ii. $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-2}L^{\beta} < 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \beta(1-\beta)K^{\alpha}L^{\beta-2} < 0$
   Diese Erhöhung des Outputs ist abnehmend mit steigendem Input von Kapital/ Arbeit (unter sonst gleichen Bedindungen). Die partielle Ableitung des Grenzprodukts des Kapitals nach K (und L) ist negativ. Dies bedeutet ein abnehmendes Grenzprodukt des Kapitals: Zuwächse des Kapitals werden immer einen Anstieg des Outputs bewirken, je mehr Kapital jedoch bereits eingesetzt wird, desto geringer der Outputzuwachs beim Einsatz einer zusäztlichen Einheit Kapitals. Dasselbe gilt für den Faktor Arbeit.

3. Totales Differential

   (a) $dy = 2c_0 x dx + c_1 dz$

   (b) $Y = \frac{1}{1-c_1}(c_0 - c_1 T + d_0 - d_1 i + G) \qquad dY = \frac{1}{1-c_1}(-c_1 dT - d_1 di + dG)$

   (c) i. $dY = -\frac{0,5}{1-0,5} \cdot 100 = -100$
   ii. $dY = \frac{1}{1-0,5} \cdot 100 = 200$

iii. $dY = \frac{1}{1-0{,}5} \cdot 200 = 400$

iv. $dY = \frac{1}{1-0{,}5} \cdot 200 + \frac{1}{1-0{,}5} \cdot 100 - \frac{0{,}5}{1-0{,}5} \cdot 100 = 400 + 200 - 100 = 500$

4. Gleichungssysteme

(a) $Y = 100 + 10I + 10G \quad \Rightarrow \quad \frac{dY}{dG} = 10$

(b) i. $Y = \frac{1}{1-c_1-b_1}\left(c_0 - c_1T + b_0 + G\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial c_0} = \frac{1}{1-c_1-b_1} > 0$
$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1-c_1-b_1} > 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial T} = -\frac{c_1}{1-c_1-b_1} < 0$

ii. endogen: Y, C, I exogen: G, T

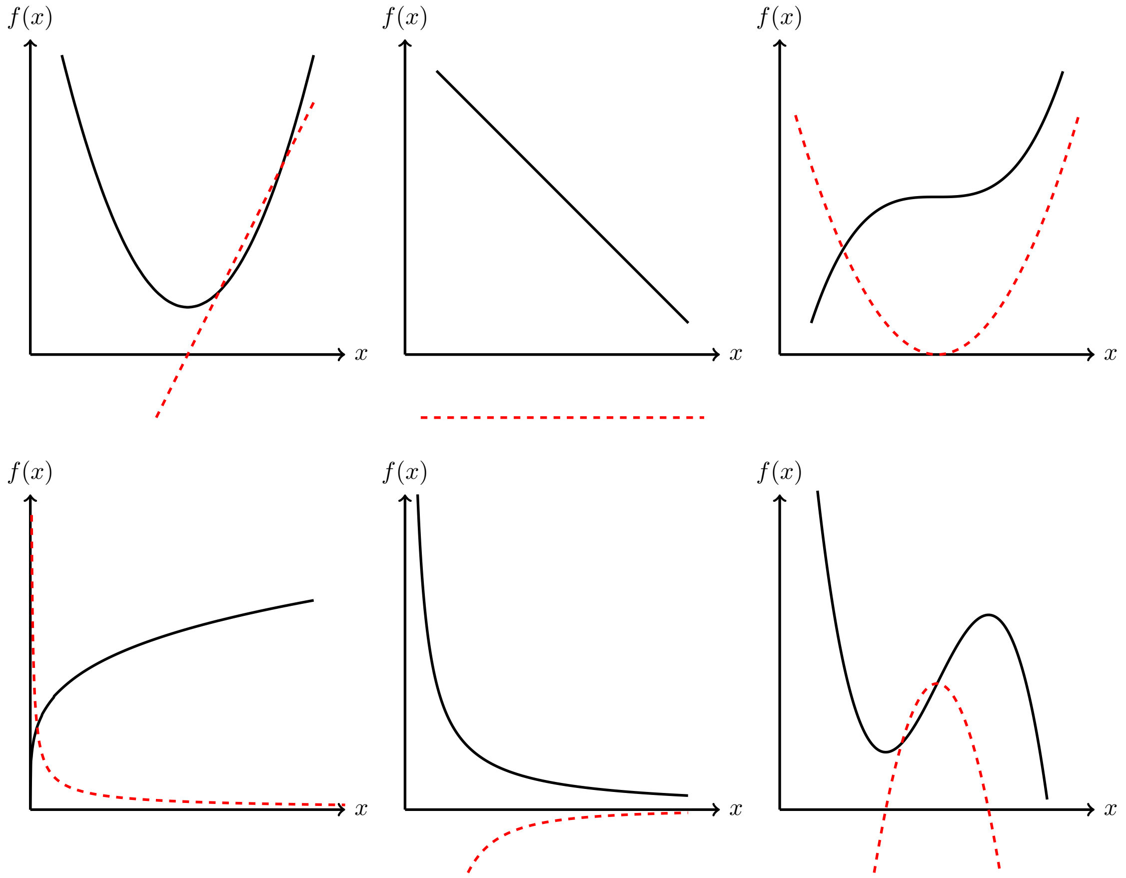
(c) $C = c_0 - c_1 t_0 + c_1(1-t_1)Y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial Y} = c_1(1-t_1) > 0 \qquad \frac{\partial C}{\partial t_0} = -c_1 < 0$

(d) $Y = \frac{a}{d_2(1-c)+ad_1} \cdot \frac{M}{P} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{a}{d_2(1-c)+ad_1} \cdot \frac{1}{P} > 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial P} = -\frac{a}{d_2(1-c)+ad_1} \cdot \frac{M}{P^2} < 0$

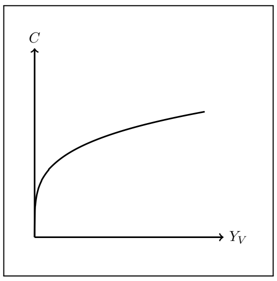
Hauptteil - Lösung

Aufgabe 1 - Ableitung: graphisch und Interpretation

1. Erste Ableitung gestrichelt in rot



2. (a) Bei einem verfügbaren Einkommen von 500 beträgt der Konsum 400.
   (b) Steigt das verfügbare Einkommen marginal (etwa: von 500 auf 501), so steigt der Konsum um 0,7.
   (c) Steigt das verfügbare Einkommen marginal (etwa: von 800 auf 801), so steigt der Konsum um 0,5.
   (d) Die erste Ableitung der Konsumfunktion ist positiv, d.h. der Konsum nimmt bei einer Erhöhung des verfügbaren Einkommens immer zu.
   (e) Die zweite Ableitung der Konsumfunktion ist negativ, d.h. mit steigendem verfügbaren Einkommen nimmt der Konsum immer langsamer zu (vgl. 2b und 2c).



   (f)

Aufgabe 2 - Ableitung von Funktionen einer Variablen

1. $y'(x) = 3x^2 - 10x$
2. $C'(Y_V) = 0,5$
3. $C'(Y_V) = c_1$
4. $C'(Y) = c_1 - c_1 \cdot t_1 = c_1(1 - t_1)$
5. $Y'(Z) = 1$
6. $I'(i) = 0$

Aufgabe 3 - Partielle Ableitung von Funktionen mehrerer Variablen

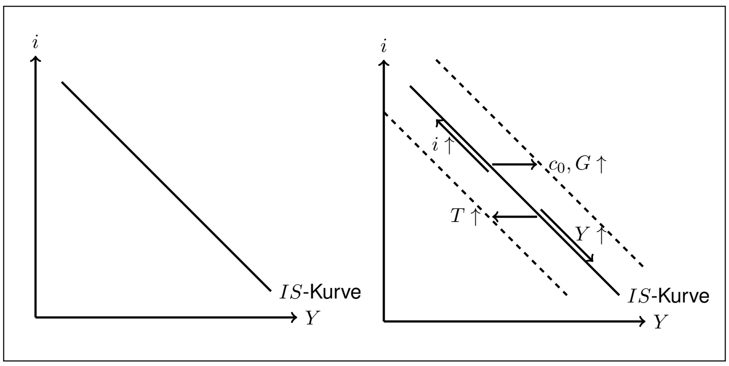
1. $\frac{\partial y}{\partial x} = 0,6x^2 \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -2z^4$
2. $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 - c \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -b$
3. $\frac{\partial y}{\partial x} = 2c_0 x \quad \frac{\partial y}{\partial z} = c_1$
4. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{5000} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{5000}$

Aufgabe 4 - Totales Differential

1. $dy = (1 - c)dx - bdz$
2. (a) $dY = \frac{1}{1-c_1}dc_0 + \frac{1}{1-c_1}dI + \frac{1}{1-c_1}dG - \frac{c_1}{1-c_1}dT = \frac{1}{1-c_1}(dc_0 + dI + dG - c_1 dT)$
   (b) i. $\frac{1}{1-c_1} > 0, \quad \frac{1}{1-c_1} > 1,$ d.h. es handelt sich um einen Multiplikator
   ii. $\frac{1}{1-c_1} > 0, \quad \frac{1}{1-c_1} > 1,$ Multiplikator
   iii. $-\frac{c_1}{1-c_1} < 0,$ für $c_1 < 0,5 : \frac{c_1}{1-c_1} < 1,$ für $c_1 > 0,5 : \frac{c_1}{1-c_1} > 1,$ aber Achtung, der Effekt ist auf jeden Fall negativ, von c_1 hängt ab ob unter- (kein Multiplikator) oder überproportional (Multiplikator) zu dT
   iv. $\frac{1}{1-c_1} - \frac{c_1}{1-c_1} = \frac{1-c_1}{1-c_1} = 1 > 0,$ Y wird um den Faktor 1 erhöht, die Veränderung ist also positiv, stellt aber keinen Multiplikator dar

Aufgabe 5 - Gleichungssysteme

1. $Y = \frac{1}{1-c_1}(c_0 - c_1 T + b_0 - b_2 i + G)$
   $\frac{\partial Y}{\partial T} = -\frac{c_1}{1-c_1} < 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1-c_1} > 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial i} = -\frac{b_2}{1-c_1} < 0$
2.
   - $T \uparrow \Rightarrow Y_V \downarrow \Rightarrow C \downarrow \Rightarrow Z \downarrow \Rightarrow Y \downarrow$
   - $G \uparrow \Rightarrow Z \uparrow \Rightarrow Y \uparrow$
   - $i \uparrow \Rightarrow I \downarrow \Rightarrow Z \downarrow \Rightarrow Y \downarrow$
3. $i = \frac{1}{b_2}(c_0 - c_1 T + b_0 + G) - \frac{1-c_1}{b_2}Y$
   $\frac{\partial i}{\partial c_0} = \frac{1}{b_2} > 0, \quad \frac{\partial i}{\partial G} = \frac{1}{b_2} > 0, \quad \frac{\partial i}{\partial Y} = -\frac{1-c_1}{b_2} < 0$



4.
5. Steigen c_0 oder G, verschiebt sich die Kurve nach rechts.
   Steigt T, verschiebt sich die Kurve nach links.
   Steigt Y oder i wandern wir entlang der Kurve.